UNIVERSITÄT BAYREUTH

5. Bayreuther Tag der Mathematik
Mathematikwettbewerb
10. Juli 2010

Lösungsvorschläge für die Klassenstufen 11 bis 13

Die Lösungsvorschläge sind bewusst knapp gehalten; einfache Zwischenschritte können leicht ergänzt werden. Die Bewertung hing neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründung und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze wurden belohnt.

Aufgabe 1: Saharadurchquerung

Ein Club für Abenteuerreisen möchte eine Saharadurchquerung organisieren. Aus Vorsicht möchte man dabei alle Fahrzeuge nur mit der halben Nutzlast beladen, damit die Tour auch dann noch erfolgreich zu Ende geführt werden kann, wenn bis zur Hälfte der Fahrzeuge ausfallen. Es stellen sich (unter Beachtung weiterer Nebenbedingungen) daher schließlich folgende zwei Alternativen:

- Variante A: Man benutzt zwei Lastwagen.
- Variante B: Man benutzt vier Geländewagen.

Man geht davon aus, das jedes einzelne Fahrzeug (unabhängig von der Bauart und voneinander) im Rahmen der Tour mit Wahrscheinlichkeit p ausfällt. (Das liegt daran, dass die meisten Ausfallursachen — z. B. Ölwannenriss durch Steinschlag — fahrzeugtypunabhängig auftreten können.) Die Clubmitglieder fragen Mathematiker W. O. um Rat. Helfen Sie ihm bei seinen Berechnungen.

(a) Wie groß ist die Erfolgswahrscheinlichkeit $W_A(p)$ für Variante A, d. h. mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt wenigstens einer der beiden Lastwagen nicht aus?

(b) Wie groß ist die Erfolgswahrscheinlichkeit $W_B(p)$ für Variante B, d. h. mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen wenigstens zwei der vier Geländewagen nicht aus?

(c) Bilden Sie die Differenz $D(p) = W_B(p) - W_A(p)$, und bestätigen Sie durch einige algebraische Umformungen, dass gilt:

$$D(p) = p^2(1-p)F(p),$$

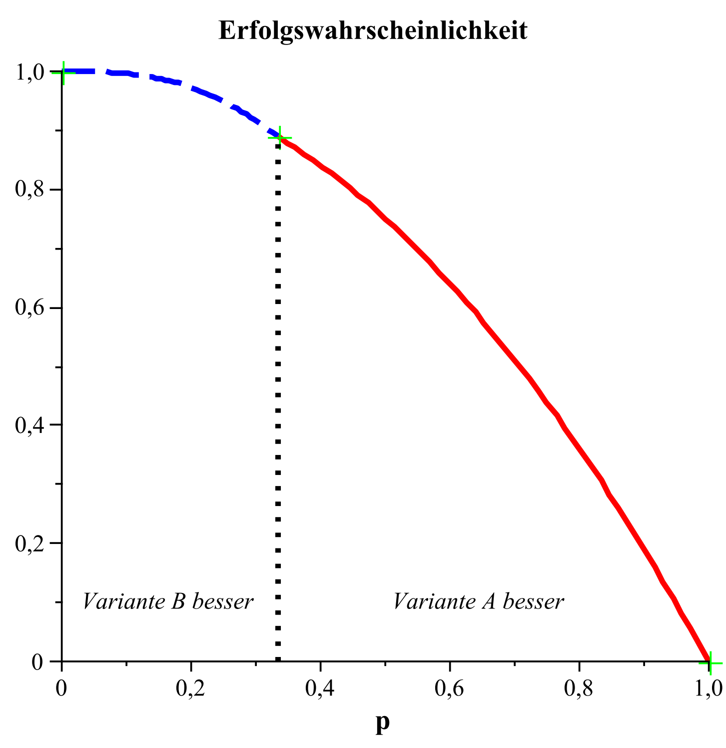
wobei Sie den Faktor $F(p)$ noch bestimmen müssen.

(d) Diskutieren Sie ausführlich die Ergebnisse aus (a) - (c). Für welche Werte von p ist welche Variante vorzuziehen? Was lässt sich in den einzelnen Fällen über die Erfolgswahrscheinlichkeit der Saharadurchquerung (für die bessere Variante) sagen?

Lösung:
(a) $1-p^2$
(Dieses Resultat ergibt sich am einfachsten mittels der Binomialformel als Gegenwahrscheinlichkeit zu genau zwei Ausfällen. Es kann aber auch direkt oder mittels eines Baumdiagramms erhalten werden.)
(b) $1-4p^3(1-p)-p^4$
(Dieses Resultat ergibt sich am einfachsten mittels der Binomialformel als Gegenwahrscheinlichkeit zu genau drei oder genau vier Ausfällen. Es kann aber auch direkt oder mittels eines Baumdiagramms erhalten werden.)
(c) Es ist:

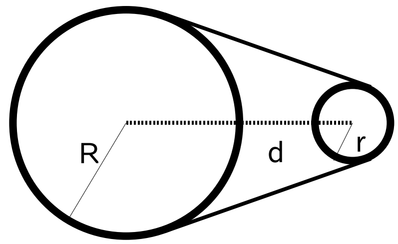
$$\begin{aligned} D(p) &= 1-4p^3(1-p)-p^4-1+p^2 \\ &= p^2(1-4p(1-p)-p^2) \\ &= p^2((1+p)(1-p)-4p(1-p)) \\ &= p^2(1-p)(1-3p). \end{aligned}$$

(d) Ist $D(p)=0$, *also* $p=0$ *oder* $p=1$ *oder* $p=1/3$, *so sind beide Varianten gleich gut, und die Erfolgswahrscheinlichkeit ist 1 bzw. 0 bzw. 8/9.*
Ist $D(p)>0$, *also* $p<1/3$, *so ist Variante B vorzuziehen. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist dann* $1-4p^3+3p^4$ *und liegt zwischen 1 (für* $p\to 0$*) und 8/9 (für* $p\to 1/3$*). Wegen* $W_B(p)'<0$ *fällt die Erfolgswahrscheinlichkeit in diesem Bereich streng monoton.*
Ist $D(p)<0$, *also* $p>1/3$, *so ist Variante A vorzuziehen. Die Erfolgswahrscheinlichkeit ist dann* $1-p^2$ *und fällt streng monoton von 8/9 (für* $p\to 1/3$*) auf 0 (für* $p\to 1$*).*
Die folgende Skizze veranschaulicht diese Resultate:



Aufgabe 2: Keilriemenlänge

Mittels eines Keilriemens, der idealsiert als Linie betrachtet wird, wird (ähnlich wie bei einer Fahrradkette) Kraft von einem Rad mit Radius R auf ein Rad mit Radius r (mit $r \leq R$) übertragen (s. Skizze).

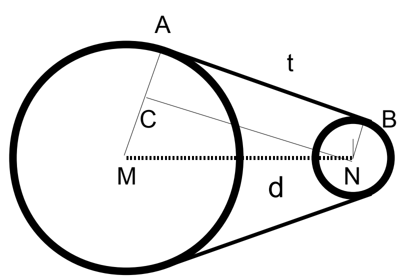


Der Abstand der Radmittelpunkte sei d. Gesucht ist die Länge L des Keilriemens.

(a) Betrachten Sie den Spezialfall $R = r$.

(b) Lösen Sie den allgemeinen Fall.

Lösung: (a) Im Spezialfall ergibt sich durch direktes Nachrechnen mittels Halbkreisbögen und Strecken $L = 2\pi R + 2d$.
(b) Im allgemeinen Fall seien M und N die Mittelpunkte der Kreise, sowie A und B die Berührpunkte des gemeinsamen Tangentenstückes (s. Skizze).



Da Tangenten an einen Kreis stets senkrecht auf dem zum Berührpunkt eingezeichneten Radius stehen, sind BN und AM parallel. Verschiebt man dann das Tangentenstück AB parallel entlang BN und AM um die Strecke r (also bis B auf N zu liegen kommt), so ergibt sich das rechtwinkelige Dreieck MNC mit den Seitenlängen R-r, d und t. Pythagoras liefert:

$$t := |AB| = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}.$$

Ferner ist der Winkel CMN gleich dem Winkel, den MA und NB zur Horizontalen bilden. Der Cosinus dieses Winkels φ ist (R-r)/d (Ankathete zu Hypotenuse). Hieraus kann φ im Bogenmaß und damit die Länge der Kreisbögen bestimmt werden. Es ergibt sich für die Länge des Keilriemens:

$$L = 2\left[R\left(\pi - \arccos\left(\frac{R-r}{d}\right)\right) + r\left(\arccos\left(\frac{R-r}{d}\right)\right) + t\right].$$

Im Spezialfall ist $t = d$ *und* $R = r$, *also wie oben* $L = 2\pi R + 2d$.

Aufgabe 3: Raumbelegung

Mathematiker W. O. ist wieder einmal im Stress. Er soll für einen bestimmten Zeitraum (z. B. Donnerstag von 10 - 12 Uhr) die Raumplanung für das mathematische Institut vornehmen. Dazu stehen ihm die sieben Räume $R_1, \ldots, R_7$ zur Verfügung. Allerdings wollen auch sechs Dozenten $D_1, \ldots, D_6$ gleichzeitig Veranstaltungen anbieten. Nicht jeder Raum eignet sich nach Platzzahl und Ausstattung für jede Veranstaltung. Genauer liegen folgende 'Wunschlisten' bzw. Anforderungen vor:

Dozent	mögliche Räume
D_1	R_1, R_4, R_6
D_2	R_1, R_2, R_4, R_5, R_6
D_3	R_4, R_6
D_4	R_1, R_6
D_5	R_4
D_6	R_1, R_3, R_5

Mathematiker W. O. fragt sich, ob er jedem Dozenten jeweils genau einen Raum aus dessen 'Wunschliste' zuordnen kann?

(a) Lässt sich das Problem lösen? Wenn ja, wie? Oder ist es unlösbar? Wenn ja, warum?

Weil er die Raumplanung auch für andere Zeiten vornehmen muss, betrachtet Mathematiker W. O. das folgende **abstrakte Problem**:
Gegeben sei eine nichtleere endliche Menge D und eine weitere nichtleere (evtl. auch unendliche) Menge R. Jedem Element $d \in D$ sei eine Teilmenge $R(d) \subset R$ zugeordnet. Gibt es dann eine Abbildung (Zuordnung) z von D nach R mit den Eigenschaften:

(1) z ist injektiv (d. h. für alle $d_1, d_2 \in D$ gilt: $d_1 \neq d_2 \Rightarrow z(d_1) \neq z(d_2)$).
(Im konkreten Problem bedeutet dies, dass verschiedene Dozenten auch verschiedene Räume erhalten. Oder anders ausgedrückt: Der gleiche Raum wird nicht an zwei verschiedene Dozenten vergeben.)

(2) Für alle $d \in D$ gilt: $z(d) \in R(d)$.
(Im konkreten Problem bedeutet dies, dass jeder Dozent einen Raum aus seiner 'Wunschliste' erhält.)

Helfen Sie bei der Lösung des **abstrakten Problems**.

(b) Formulieren Sie für das **abstrakte Problem** eine einleuchtende notwendige Bedingung für die Existenz einer Zuordnung z mit den geforderten Eigenschaften.

(c) Prüfen Sie, ob Ihre Bedingung aus (b) für das konkrete Raumverteilungsproblem (mit der obigen Tabelle) die richtige Antwort angibt.

(d) Prüfen Sie (mit Beweis), ob Ihre Bedingung aus (b) für die Fälle, dass D genau ein Element oder genau zwei Elemente besitzt, auch hinreichend ist. (Sie dürfen auch weiter denken; das ist aber nicht Teil der Aufgabe!)

Lösung: (a) Für die vier Dozenten D_1, D_3, D_4, D_5 stehen nur die drei Räume R_1, R_4, R_6 zur Verfügung. Das Problem ist also nicht lösbar.
(b) Für eine Teilmenge T von D setze man:

$$R(T) := \bigcup_{d \in T} R(d).$$

Dann ist die Bedingung:

$$\text{Für alle } T \subset D : |T| \leq |R(T)|.$$

(c) Die Bedingung ist nicht erfüllt für $T = \{D_1, D_3, D_4, D_5\}$. *In der Tat ist deshalb auch das Raumproblem unlösbar, da für vier Dozenten nur drei Räume zur Verfügung stehen. Die Bedingung gibt also hier die richtige Antwort.*
(d) Falls D *genau ein Element* d_1 *enthält, muss* $R(d_1)$ *mindestens ein Element* r_1 *enthalten. Man setze dann* $z(d_1) = r_1$. *Falls* D *genau zwei Elemente* d_1 *und* d_2 *enthält, so müssen* $R(d_1)$ *bzw.* $R(d_2)$ *jeweils mindestens ein Element* r_1 *bzw.* r_2 *enthalten. Ist* $r_1 \neq r_2$, *setze man* $z(d_i) = r_i$ *für* $i = 1, 2$. *Falls* $r_1 = r_2$, *muss entweder* $R(d_1)$ *oder* $R(d_2)$ *noch ein weiteres (von* r_i *verschiedenes) Element* r_3 *enthalten. Sei o.B.d.A.* $r_3 \in R(d_1)$. *Dann setze man* $z(d_1) = r_3$ *und* $z(d_2) = r_2$.

Aufgabe 4: Quadratzahlen

Das Quadrat einer ganzen Zahl bezeichnet man als Quadratzahl. Man zeige: Ist m eine Quadratzahl und n die Summe zweier Quadratzahlen, so ist auch $2mn$ die Summe zweier Quadratzahlen.

Lösung: Es sei $m = \alpha^2$ *und* $n = \beta^2 + \gamma^2$. *Dann ist:*

$$2mn = 2(\alpha\beta)^2 + 2(\alpha\gamma)^2 = (\alpha\beta + \alpha\gamma)^2 + (\alpha\beta - \alpha\gamma)^2.$$