



Lösungsvorschläge für die Klassenstufen 5 und 6

Die Lösungsvorschläge sind bewusst knapp gehalten; einfache Zwischenschritte können leicht ergänzt werden. Die Bewertung hing neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründung und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze wurden belohnt.

Aufgabe 1: Stadtmeisterschaft

Die drei Freunde Martin, Philipp und Simon starteten bei den Leichtathletik-Stadtmeisterschaften für das Gymnasium Neustadt. Einer von ihnen nahm am 100m-Lauf, einer am 200m-Lauf und einer am 400m-Lauf teil. Außerdem war es für einen von ihnen die erste, für einen die zweite und für einen die dritte Teilnahme an einer Stadtmeisterschaft.

Mathematiklehrer Pffiffig hört im Lehrerzimmer, wie der betreuende Sportlehrer Folgendes davon berichtet: "Martin war ja das erste Mal dabei, dafür hat er seine Sache sehr gut gemacht. Allerdings melde ich ihn beim nächsten Mal doch besser für den 200m-Lauf an; dort liegt vielleicht seine wirkliche Stärke. Philipp war zu aufgeregt; er sollte sich ein bißchen an unserem 100m-Läufer orientieren. Der war jetzt zum dritten Mal dabei und ganz gelassen." Kann Herr Pffiffig daraus bereits schließen, welcher Schüler an welchem Lauf teilnahm und welcher Schüler zum zweiten Mal an einer Stadtmeisterschaft teilnahm?

Lösung: Martin nahm nicht am 200m-Lauf und nicht am 100m-Lauf teil. Also lief er die 400m-Strecke. Philipp lief nicht den 100m-Lauf, und daher (da der 400m-Lauf von Martin gelaufen wurde) den 200m-Lauf. Simon lief also 100m. Martin war zum ersten Mal und Simon zum dritten Mal dabei. Zum zweiten Mal dabei war daher Philipp.

Aufgabe 2: Abdeckpapier

Schülerin Friederike Frosch hat gerade ihr Zimmer leer geräumt, um die Wände neu zu streichen. Das Zimmer ist rechteckig und 3 Meter breit und 4 Meter lang. Natürlich möchte sie den Boden zum Schutz vor Farbspritzern vollständig abdecken.

- Das Abdeckpapier gibt es nur in rechteckigen Bögen, die 2 Meter breit und 2,5 Meter lang sind. Es kann allerdings beim Verlegen beliebig zugeschnitten werden. Wie viele Bögen muss Friederike mindestens kaufen? Wie viel Verschnitt bleibt übrig?
- Friederike überlegt, was passiert, wenn man nichts abschneidet, sondern sich das Abdeckpapier überlappt. Sie betrachtet den Fall, dass sie drei Bögen Abdeckpapier mit jeweils einer Größe von 5 Quadratmetern und **beliebiger** Form in ihrem Zimmer auslegt. Dann muss es ihrer Meinung nach zwei Bögen darunter geben, die sich auf mindestens einer Fläche von einem Quadratmeter überlappen. Ist das richtig? Wenn ja, wie kann man es begründen?

Lösung: (a) Wegen $3 \text{ Meter} \times 4 \text{ Meter} = 12 \text{ Quadratmeter}$ und $2 \text{ Meter} \times 2,50 \text{ Meter} = 5 \text{ Quadratmeter}$, braucht sie mindestens 3 Bögen. Es bleiben dann 3 Quadratmeter Verschnitt.

(b) Man legt die Bögen nacheinander aus. Falls sich jeweils zwei davon um weniger als einen Quadratmeter überlappen, liefert der erste 5 Quadratmeter, der zweite mehr als 4 Quadratmeter und der dritte mehr als 3 Quadratmeter bisher noch nicht überdeckte Fläche — zusammen also mehr als $5+4+3$ Quadratmeter = 12 Quadratmeter. Das steht im Widerspruch zur Zimmergröße.

Oder: Die Überlappungsfläche (Verschnitt) beträgt insgesamt (mindestens) 3 Quadratmeter. Wenn man diese Fläche auf die drei Bögen verteilt, muss in wenigstens einem Fall eine Überlappung von mindestens einem Quadratmeter auftreten.

Aufgabe 3: Frostschutzmittel

Das Kühlsystem des Autos von Vater Frosch fasst 10 Liter Flüssigkeit. Vater Frosch möchte sein Auto mit Frostschutzmittel winterfest machen und fragt seine mathematisch geschulte Tochter Friederike um Rat.

- (a) Am 1. November ist das Kühlsystem ganz mit Wasser gefüllt. Vater Frosch denkt, dass eine Mischung von drei Teilen Wasser und einem Teil Frostschutzmittel ausreicht. Wie viel Wasser muss er entnehmen und durch Frostschutzmittel ersetzen?
- (b) Am 2. November befindet sich im Kühlsystem eine Mischung von drei Teilen Wasser und einem Teil Frostschutzmittel. Da hört Vater Frosch, dass der Winter hart werden soll, und möchte nunmehr den Frostschutzmittelgehalt so erhöhen, dass die neue Mischung aus 3 Teilen Wasser und 2 Teilen Frostschutzmittel besteht. Wie viele Liter der bestehenden Mischung muss er jetzt entnehmen und durch Frostschutzmittel ersetzen?

Lösung: (a) Man denkt sich die 10 Liter Flüssigkeit in 4 Kanistern zu je 2,5 Liter abgefüllt. Ein Kanister muss durch einen Kanister Frostschutzmittel ersetzt werden. Er muss also 2,5 Liter Wasser durch Frostschutzmittel ersetzen.

(b) Wie in (a) überlegt man sich zunächst, dass die neue Mischung 4 Liter Frostschutzmittel enthalten muss. Andererseits enthält jeder Liter der alten Mischung aus (a) wegen $4 \times 0,25$ Liter = 1 Liter genau 0,25 Liter Frostschutzmittel. Wenn Vater Frosch also einen Liter alte Mischung entnimmt und durch einen Liter Frostschutzmittel ersetzt, so erhöht er die Frostschutzmittelmenge im Kühlsystem um 0,75 Liter. Er muss daher insgesamt 2 Liter entnehmen, um die zusätzlich nötigen 1,5 Liter (= 4 Liter - 2,5 Liter) Frostschutzmittel einzufüllen.

Aufgabe 4: Dreieck

Ein Dreieck heißt spitzwinklig, wenn jeder seiner drei Innenwinkel kleiner als 90° ist. Zeige, dass es nicht möglich ist, ein beliebiges Dreieck durch eine eingezeichnete Strecke in zwei Teildreiecke zu zerlegen, die beide spitzwinklig sind.

Lösung: Die Strecke muss durch einen Eckpunkt gehen, da sonst das Dreieck nicht in zwei Teildreiecke zerlegt wird. Die Strecke trifft dann auf die gegenüber liegende Seite und bildet dort zwei Winkel mit der Winkelsumme 180° . (In der Skizze die Winkel ADC und CDB.) Daher können nicht beide Winkel kleiner als 90° sein.

