Lösungsvorschläge für die Klassenstufen 7 und 8

Die Lösungsvorschläge sind bewusst knapp gehalten; einfache Zwischenschritte können leicht ergänzt werden. Die Bewertung hing neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründung und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze wurden belohnt.

Aufgabe 1: Wahl

Anton, Betty und Carola kandidieren für den Vorsitz des Schul-Computer-Clubs. Bei der Wahl wird jedes der 12 Mitglieder des Clubs einen Wahlzettel ausfüllen und darauf die drei Namen in der Reihenfolge seiner Vorlieben notieren. Carola ist sich sicher, dass sie auf mindestens fünf solchen Zetteln an erster Stelle genannt wird. Sie ist sich auch sicher, dass Anton und Betty jeweils mindestens dreimal an erster Stelle genannt werden. Nach der Satzung erhält der Erstgenannte einen Punkt, die beiden anderen erhalten 0 Punkte. Gewählt ist der Kandidat mit den meisten Punkten. Da schlägt Anton eine Änderung der Punktevergabe vor. Der Erstgenannte soll demnach 3 Punkte, der Zweitplatzierte 2 Punkte und der Dritte noch einen Punkt erhalten. Gewählt ist wieder der Kandidat mit den meisten Punkten. Soll Carola diesem Vorschlag zustimmen? Könnte dies etwas am Ausgang der Wahl ändern?

Lösung: Nach dem gegenwärtigen System ist Carola sichere Siegerin, da Anton und Betty höchstens vier Punkte erreichen können. Nach dem neuen System lassen sich leicht Gegenbeispiele angeben. Kürzt man die Vornamen durch den Anfangsbuchstaben ab und ergeben sich z. B. bei der Wahl fünf Zettel des Typs (C,A,B), drei Zettel des Typs (A,B,C) und vier Zettel des Typs (B,A,C), so hat Carola nach dem bisherigen System 5 Punkte, Anton 3 Punkte und Betty 4 Punkte. Nach dem neuen System erhielte Carola $5 \times 3 + 7 \times 1 = 22$ *Punkte, Anton* $3 \times 3 + 9 \times 2 = 27$ *Punkte und Betty* $4 \times 3 + 3 \times 2 + 5 \times 1 = 23$ *Punkte. Anton würde also in diesem Beispiel nach dem neuen System gewinnen.*
Vergibt man allgemeiner a *Punkte für den Erstplatzierten,* $b\,(\leq a)$ *Punkte für den Zweitplatzierten und* $c\,(\leq b)$ *Punkte für den Drittplatzierten, so bleibt Carola sichere Siegerin, sofern* $5a + 7c > 4a + 8b$ *bzw.* $a > 8b - 7c$ *ist. Für* $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ *ist das der Fall, für* $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ *dagegen nicht.*

Aufgabe 2: Autobustür

Die beiden Türflügel eines Autobusses öffnen sich nicht durch einfache Drehung, sondern aus Sicherheitsgründen durch eine kompliziertere Bewegung. In einer Skizze liegt einer der beiden Türflügel in einem kartesischen Koordinatensystem im geschlossenen Zustand gerade auf der Strecke von O=(0,0) nach A=(1,0). Beim Öffnen rutscht der linke Endpunkt die y-Achse entlang von O=(0,0) nach B=(0,1) und gleichzeitig der rechte Endpunkt die x-Achse entlang von A=(1,0) nach O=(0,0). Auf welcher Kurve bewegt dabei sich der Mittelpunkt des Türflügels? Die Lösung ist möglichst genau zu begründen.

Lösung: Der Thaleskreis über dem Türflügel geht jeweils durch den Ursprung. Also ist der Mittelpunkt M des Türflügels immer gleich weit von O entfernt und rotiert daher auf dem Viertelkreis von ($\frac{1}{2}$,0) nach (0,$\frac{1}{2}$). (Bei Autobussen zu besichtigen!)
Bemerkenswerterweise beschreibt er die gleiche Bahn wie bei einer einfachen Drehung des Türflügels um den Punkt O.
Diese Tatsache hat das siegreiche Team dieser Altersstufe umgekehrt für eine sehr originelle Lösung genutzt. Dazu nimmt man an, dass der Türflügel zu einem bestimmten Zeitpunkt gerade so liegt, dass sich der linke Randpunkt im Punkt (0,c) und der rechte Randpunkt im Punkt (d,0) befindet. Man kann dann die Tür an der Parallelen zur y-Achse durch den Punkt ($\frac{d}{2}$,0) spiegeln. Dabei bleibt der Mittelpunkt des Türflügels fest, da er auf der Spiegelungsachse liegt. Andererseits entspricht die Bewegung des gespiegelten Türflügels insgesamt gerade der einfachen Drehung des Türflügels um den Punkt O. Also muss der Mittelpunkt sich auf der gleichen Kurve wie bei der einfachen Drehung bewegen.
Alternativ könnte man den Türflügel auch jeweils an der Parallelen zur x-Achse durch den Punkt (0,$\frac{c}{2}$) spiegeln. Dies läuft darauf hinaus, den Türflügel in obiger Position solange um seinen Mittelpunkt ($\frac{d}{2}$,$\frac{c}{2}$) gegen den Uhrzeigersinn zu drehen, bis der linke Randpunkt auf O=(0,0) fällt. Diese Version zeigt auch einen Weg auf, sich vorzustellen, wie die tatsächliche Bewegung des Türflügels technisch durch Modifikation aus der einfachen Drehung entstehen kann. Man kann sich nämlich die gesamte Bewegung auch so vorstellen, dass der Türflügel durch einen vom Punkt O=(0,0) bis zum Türflügelmittelpunkt reichenden Dreharm ganz einfach um $90°$ entgegen dem Uhrzeigersinn um O=(0,0) gedreht wird und dass der Türflügel gleichzeitig mit doppelter Drehgeschwindigkeit um den Türfügelmittelpunkt im Uhrzeigersinn rotiert. Dann entsteht genau die hier beschriebene kompliziertere Bewegung — und der Mittelpunkt rotiert natürlich auf dem Viertelkreis von ($\frac{1}{2}$,0) nach (0,$\frac{1}{2}$).

Aufgabe 3: Fußballbilder

16 Kinder in der Klasse von Grundschullehrerin Schlau sammeln Weltmeisterschaftsfußballbilder, die als Beilage in Schokoriegeln zu finden sind. Im Durchschnitt haben sie 45 Bilder. Allerdings sind die Bilder recht unterschiedlich verteilt. Markus hat am wenigsten: Er hat 25 Bilder gesammelt. Alle anderen Sammler haben mehr. Zudem besitzen mindestens 10 Kinder jeweils mehr als 40 Sammelbilder. Lehrerin Schlau fragt sich, wie groß wohl die Maximalzahl M von Bildern ist, die eines der 16 Kinder gesammelt hat. Dabei kann es natürlich sein, dass mehrere Kinder diese Maximalzahl erreichen. Man gebe mit genauer Begründung einen möglichst engen Bereich an, in dem M liegen muss.

Lösung: (1) M wird so groß wie möglich, wenn alle anderen so wenig wie möglich besitzen. Sonst kann man durch Umverteilen eine Vergrößerung von M erreichen. Außer dem "bilderreichsten" Kind besitzen aber 9 weitere mindestens 41, fünf weitere mindestens 26 und Markus 25. Also hat man:

$$M \leq 16 \times 45 - 9 \times 41 - 5 \times 26 - 25 = 196.$$

(2) M wird so klein wie möglich, falls alle anderen so viel wie möglich besitzen, d. h. alle außer Markus besitzen die gleiche Anzahl, soweit dies unter der Bedingung der Ganzzahligkeit erreichbar ist. Sonst kann man durch Umverteilen eine Verkleinerung von M erreichen. Nun ist

$$\frac{45 \times 16 - 25}{15} = \frac{720 - 25}{15} = \frac{690 + 5}{15} = 46 + \frac{1}{3}.$$

Daher ist $M \geq 47$ (wegen der Ganzzahligkeit).

Aufgabe 4: Plätzchenessen

Bei einem Kaffeetrinken aßen 4 befreundete Ehepaare insgesamt 44 Plätzchen. Anna aß 2 Plätzchen, Bettina 3 Plätzchen, Carola 4 Plätzchen und Dorothea sogar 5 Plätzchen. Herr Braun aß genau so viele Plätzchen wie seine Frau, aber alle anderen Männer aßen mehr als ihre Frauen: Herr Grün aß doppelt so viele Plätzchen wie seine Frau, Herr Weiß aß dreimal so viele Plätzchen wie seine Frau und Herr Schmidt aß sogar viermal so viele Plätzchen wie seine Frau. Wie lauten die Nachnamen der vier Frauen? (Die Antwort ist möglichst gut zu begründen.)

Lösung: Man kann entweder alle 24 Möglichkeiten durchprobieren. Oder: Mit offensichtlicher Notation (Anfangsbuchstabe des Nachnamens als Kleinbuchstabe) ergibt sich:

$$b + g + w + s = 14$$

und

$$b + 2g + 3w + 4s = 30.$$

Durch Subtraktion ergibt sich:

$$g + 2w + 3s = 16.$$

Daher müssen g und s beide gerade oder beide ungerade sein. Man muss also nur die folgenden Fälle durchprobieren:

g	s	$w = (16 - 3s - g)/2$
3	5	-1
5	3	1
2	4	1
4	2	3

Nur der letzte Fall ist nach den Bedingungen möglich, also ist $s = 2$, $w = 3$, $g = 4$ und $b = 5$. Die Damen heißen daher Anna Schmidt, Bettina Weiß, Carola Grün und Dorothea Braun.