UNIVERSITÄT BAYREUTH

5. Bayreuther Tag der Mathematik
Mathematikwettbewerb
10. Juli 2010

Lösungsvorschläge für die Klassenstufen 9 und 10

Die Lösungsvorschläge sind bewusst knapp gehalten; einfache Zwischenschritte können leicht ergänzt werden. Die Bewertung hing neben der Korrektheit auch von der Qualität der Begründung und der Beschreibung der Lösungswege ab. Auch Ansätze wurden belohnt.

Aufgabe 1: Klassenfahrt

Eine Schulklasse mietet einen Bus für ihre Klassenfahrt für insgesamt 900 EUR, wobei jeder Teilnehmer den gleichen Betrag bezahlt. Leider müssen zwei Teilnehmer krankheitsbedingt absagen. Dadurch erhöhen sich die Kosten für jeden der verbleibenden Teilnehmer um genau 5 EUR, um weiterhin die Gesamtsumme von 900 EUR zu erreichen. Wie viele Teilnehmer wollten ursprünglich fahren?

Lösung: Aus $\dfrac{900}{x-2} = \dfrac{900}{x} + 5$ *folgt* $900x = 900(x-2) + 5x(x-2)$ *bzw.* $x^2 - 2x - 360 = 0$. *Dies ist äquivalent zu* $(x-20)(x+18) = 0$. *Daher folgt* $x = 20$ *oder* $x = -18$. *Da* $x = -18$ *nicht als Lösung in Frage kommt, ist* $x = 20$.

Aufgabe 2: Seitenlängen

Man betrachte ein Dreieck mit den Seitenlängen a, b und c. Dabei gelte $c \geq a$ und $c \geq b$. Man zeige:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{a} \geq 2.$$

Lösung: Wegen $c \geq b$ *reicht es zu zeigen:*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(a-b)^2 \geq 0$$

und also richtig.

Aufgabe 3: Boxenstopp

Lohnt sich ein Boxenstopp? Diese Frage stellt sich häufig bei Autorennen. Denn einerseits kann man der Witterung angepasste Reifen aufziehen und dann schneller fahren, andererseits kostet der Boxenstopp natürlich Zeit. Beim Rennstall Ferraro wird diese Frage in etwas vereinfachter Form untersucht. Man nimmt dazu an, ein Rennwagen sei auf einer Rennstrecke von 480 km Länge unterwegs und bewege sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 240 km/h. Irgendwann während der Fahrt klart das Wetter auf, so dass man statt der bei Beginn aufgezogenen Regenreifen auf normale Reifen wechseln könnte. Dazu ist ein Boxenstopp erforderlich, der 45 Sekunden dauert. Danach kann der Rennwagen aber mit einer konstanten Geschwindigkeit von 300 km/h seine Fahrt fortsetzen.

(a) Bei welchem Streckenkilometer der Gesamtstrecke von 480 km Länge muss der Boxenstopp spätestens erfolgen, damit er sich noch auszahlt?

(b) Ein Motivationstrainer bietet an, während des Boxenstopps zusätzlich den Fahrer geistig aufzubauen. Dadurch würde sich der Boxenstopp allerdings auf 75 Sekunden verlängern. Andererseits fährt der Fahrer danach mit einer konstanten Geschwindigkeit von 301 km/h (statt 300 km/h). Soll man auf das Angebot eingehen?

Lösung: (a) Bei 240 km/h fährt der Rennwagen 4 km pro Minute und benötigt 15 Sekunden für einen km. Bei 300 km/h sind es nur 12 Sekunden pro km. Er macht also pro Kilometer 3 Sekunden gut. Um 45 Sekunden aufzuholen, braucht man also 15 km Strecke. Der Boxenstopp muss vor Streckenkilometer 465 erfolgen.
(b) Ohne Training ist der Wagen 30 Sekunden eher auf der Strecke und gewinnt in dieser Zeit einen Vorsprung von 2,5 km. Um diesen Vorsprung aufzuholen, bräuchte ein Wagen mit Fahrertraining 150 Minuten oder eine Strecke von 752,5 km, da er 1 Kilometer pro Stunde bzw. auf 301 km Strecke gut macht. Die Rennstrecke beträgt aber nur 480 km; es lohnt sich also nicht.

Aufgabe 4: Geburtstag

Am Neujahrstag des Jahres 1953 lernten sich A und B während einer Bahnfahrt kennen. Im Verlauf des Gesprächs kam die Rede auf das Alter der beiden. A sagte: "Wenn Sie die Quersumme meines (vierstellig geschriebenen) Geburtsjahres bilden, so erhalten Sie mein Alter." B ist Mathematiker und überlegt einige Zeit. Dann gratuliert er A zum Geburtstag.

(a) Woher wusste B ohne weitere Angaben das Geburtsdatum?

(b) Wann wurde A geboren?

Lösung: A kann höchstens 27 Jahre alt sein, denn die größte Quersumme, die unter den gegebenen Bedingungen möglich ist, ist $1+8+9+9=27$. *Er ist also nach 1924 geboren.*

Eine elementare Lösung ergibt sich, indem man sich zunächst überlegt, dass die Jahre $1925, \ldots, 1929$ *nicht als Geburtsjahre in Frage kommen, weil die höchste Quersumme eines dieser Jahre (für 1929) addiert zur höchsten Jahreszahl 1929 noch unter 1953 bleibt. Gleiches gilt für die Jahre* $1930, \ldots, 1934$.
Umgekehrt kommen die Jahre $1940, \ldots, 1952$ *nicht in Frage, weil hier selbst die kleinste Quersumme (für 1940) addiert zum frühesten Jahr 1940 über 1953 hinausreicht. Gleiches gilt wieder für die Jahre* $1936, \ldots, 1939$.
Es bleibt das Jahr 1935 zu betrachten. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden. Falls A am 01.01. Geburtstag hat, ist er gerade 18, und die Aussage ist erfüllt.
Falls A nicht am 01.01. Geburtstag hat, ist er 17 und die Aussage nicht erfüllbar.

Eine formalere Lösung ist:

Sein Geburtsjahr sei $1900+10a+b$ *mit ganzzahligem* a *und* b, *wobei* $2 \leq a \leq 5$ *und* $0 \leq b \leq 9$.
Sein Alter am 1.1.1953 beträgt laut Voraussetzung 1+9+a+b.
Fall 1: Er ist am 1.1.geboren. Dann gilt

$$1+9+a+b = 1953 - (1900+10a+b)$$

oder

$$43 = 11a + 2b$$

Unter den Einschränkungen ist $a = 3$ und $b = 5$ die eindeutige Lösung.
Fall 2: Er ist nicht am 1.1. geboren. Dann ergibt sich analog

$$42 = 11a + 2b$$

Diese Gleichung hat unter den Einschränkungen keine Lösung.